Aula 9

Topologia em $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ é um espaço métrico com a distância dada por

$$d(z,w) = |z - w|$$

$\mathbb{C}$ é **isométrico** a $\mathbb{R}^2$

$$B_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \delta\}$$

Definição: Diz-se que $A \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto aberto**, se para qualquer $z \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset A$.
Chama-se **vizinhança aberta** de um ponto z a qualquer conjunto aberto que o contenha.

Proposição:

- Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ são abertos.
- Intersecções finitas de abertos são abertas.
- Reuniões arbitrárias de abertos são abertas.

Definição: Diz-se que $F \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto fechado**, se o complementar $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ é aberto.

Proposição:

- Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ são fechados.
- Reuniões finitas de fechados são fechadas.
- Intersecções arbitrárias de fechados são fechadas.

Definição:

- Diz-se que um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **limitado** se existe $M > 0$ tal que para todos $z \in \Omega$ se tem $|z| \leq M$. Ou seja, se $\Omega \subset B_M(0)$.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto fronteiro** de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se, para todo o $\delta > 0$ se tem $B_\delta(z) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $B_\delta(z) \cap \Omega^c \neq \emptyset$. Designa-se por **fronteira** de Ω e representa-se $\partial\Omega$ o conjunto dos pontos fronteiros de Ω.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto interior** de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset \Omega$. Designa-se por **interior** de Ω e representa-se $\operatorname{int}\Omega$ o conjunto dos pontos interiores de Ω.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto exterior** de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset \Omega^c$, ou seja, se $z \in \operatorname{int}\Omega^c$. Designa-se por **exterior** de Ω e representa-se $\operatorname{ext}\Omega$ o conjunto dos pontos exteriores de Ω.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto aderente** a um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo o $\delta > 0$ se tem $B_\delta(z) \cap \Omega \neq \emptyset$. Designa-se por **aderência** ou **fecho** de Ω e representa-se $\overline{\Omega}$ o conjunto dos pontos aderentes a Ω.

- Diz-se que $\Omega \subset C$ é um **subconjunto denso** se $\overline{\Omega} = \mathbb{C}$.

Proposição:

- Dado qualquer conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tem-se que $\mathbb{C}$ é dado pela reunião disjunta $\mathbb{C} = \operatorname{int}\Omega \cup \partial\Omega \cup \operatorname{ext}\Omega$.

- Dado qualquer conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tem-se que $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = (\operatorname{ext}\Omega)^c$.

- $A \subset \mathbb{C}$ é aberto $\Leftrightarrow$ $\operatorname{int} A = A \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$.

- $F \subset \mathbb{C}$ é fechado $\Leftrightarrow$ $F = \overline{F} \Leftrightarrow \partial F \subset F$.

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ é denso $\Leftrightarrow$ para todo o $\delta > 0$ e todo o $z \in \mathbb{C}$, tem-se $B_\delta(z) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Sucessões em $\mathbb{C}$

$$\{z_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

$$z_n = x_n + iy_n$$

Definição: Diz-se que $L \in \mathbb{C}$ é o **limite da sucessão** $\{z_n\}$, ou que $\{z_n\}$ **converge para** $L \in \mathbb{C}$, e representa-se $\lim z_n = L$ ou $z_n \to L$, se qualquer que seja a bola centrada em L, $B_\delta(L)$ existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ os correspondentes termos da sucessão estão todos nessa bola, $z_n \in B_\delta(L)$. Ou seja,

$$\forall_{\delta>0} \, \exists_{N\in\mathbb{N}} : n > N \Rightarrow |z_n - L| < \delta,$$

ou ainda, no sentido de $\mathbb{R}$

$$d(z_n, L) = |z_n - L| \to 0.$$

Chama-se **sucessão convergente** a uma sucessão que tem limite complexo e sucessão **sucessão divergente** no caso contrário.

Proposição: Seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos, $z_n = x_n + i\, y_n$ e $L = a + i\, b \in \mathbb{C}$. Então

$$z_n \to L \text{ em } \mathbb{C} \Leftrightarrow x_n \to a \quad \text{e} \quad y_n \to b \text{ em } \mathbb{R}.$$

Proposição: Toda a sucessão convergente é limitada e o limite é único.

Proposição: Sejam $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ sucessões complexas convergentes tais que $z_n \to z$ e $w_n \to w$. Então

- $z_n \pm w_n \to z \pm w$.
- $z_n w_n \to zw$.
- $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w} \qquad (w_n, w \neq 0)$.